1．序言

为了理解马达控制技术，必须理解如下基础学问。

(1) 数学：三角函数，指数函数，复数函数，微分，积分，矩阵，坐标（直交，极）

(2) 电气电路：交流理论（3 相交流， 歪交流），过渡现象

(3) 控制理论：普拉普斯变换，传递函数，古典控制（比例积分控制），滤波器

本技术资料说明的是：三角函数。

2.. 定义

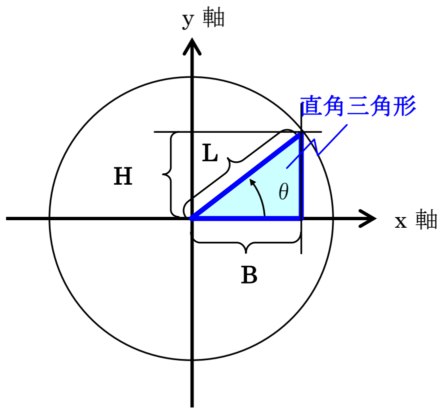


图 1 直角三角形的 XY 坐标系统上的表现

（1）三角比和三角函数

（注）将直角三角形的内角 θ 作为平面坐标系统的任意角度来平常使用时，叫三角函数。

正弦 $\sin\theta = \dfrac{H}{L}$ ---(1-1)

余弦 $\cos\theta = \dfrac{B}{L}$ ---(1-2)

正切 $\tan\theta = \dfrac{H}{B} = \dfrac{\left(\dfrac{H}{L}\right)}{\left(\dfrac{B}{L}\right)} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ --(1-3)

（2）三角函数的性质

○ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$， $\cos(-\theta) = \cos\theta$ --(1-4)

○ 角度差 $\pm n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ （n =1, 2, 3, 4）

・ $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$， $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

・ $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$， $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$

・ $\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta$， $\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

・ $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$， $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$

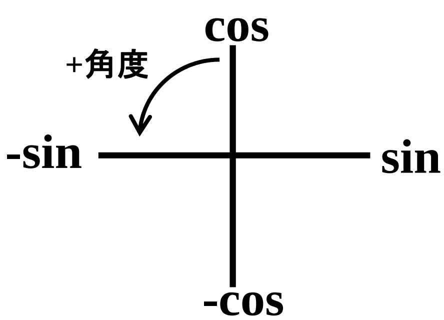


図2 sin, cos的関係

90度×n倍的角度差

- $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$, $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$
- $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$, $\sin(\theta-\pi)=-\sin\theta$
- $\sin\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos\theta$, $\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\theta$
- $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$, $\sin(\theta-2\pi)=\sin\theta$

- $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$, $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$
- $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$, $\sin(\theta-\pi)=\tan\theta$
- $\tan\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$, $\tan\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

○ 马达控制中经常使用的角度和三角函数

θ	0 度	30 度(π/6)	45 (π/4)	60 (π/3)	90 (π/2)	120 (2π/3)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$

张飞实战电子官方网站 http://www.zhangfeidz.com

3　基本公式

（1）　加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ --(4-1)

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ --(4-2)

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ --(4-3)

（2）　2 倍角的公式

○在（4-1）式，$\alpha=\beta=\theta$时

・$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$ --(5-1)

○在（4-2)式，$\alpha=\beta=\theta$时，能得到如下 2 式。

・$1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$ --(5-2)

（注）　直角三角形　从毕达哥拉斯定理（底边 B)^2＋(高度 H)^2＝(斜边 L)^2 能求到。

・$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ --(5-3)

○加上(5-2)式与(5-3)式，　$1+2\cos(2\theta)=2\cos^2\theta$，　据此，

・$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ --(5-4)

从(5-2)式减掉(5-3)式，　$1-2\cos(2\theta)=2\sin^2\theta$　据此，

・$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ --(5-5)

（3）　积和的公式与和积的公式

○积和的公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ --(6-1)

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ --(6-2)

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$ --(6-3)

○和积的公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ --(7-1)

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ --(7-2)

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ ---------------------------------------(7-3)

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ ---------------------------------------(7-4)

（4） 合成公式

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\theta-\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$$ ---------------------------------------(8-1)

任意 1 个 cos 函数或者是 sin 函数，是 sin 函数与 cos 函数之和来表现。

※ 马达的矢量控制中重要的公式

（5） 微分，积分

· $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)=-\sin\theta$ ---------------------------------------(9-1)

· $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)=\cos\theta$ ---------------------------------------(9-2)

· $\int(\cos\theta)d\theta=\sin\theta$ ---------------------------------------(9-3)

· $\int(\sin\theta)d\theta=-\cos\theta$ ---------------------------------------(9-4)

【与电气的关联 1】 **2 相交流及 3 相交流**和三角函数

三角函数历史上，

・(园与弧的世界）从半径与弧长度的关系表（正弦表）产生了正弦（sin）的概念，

・(角度与长度的世界）将其适用于直角三角形，产生了余弦（cos）的概念。

因为有如此的**历史**，所以学校教的时候将 sin 函数作为基础。**结果**，许多人的头脑中，「先 sin，然后 cos」的印象很深。

对此，交流马达控制的领域上，

根据考虑「有 cos 函数的交流磁通，对此该怎么导通交流**电流**？」，

最好习惯于将 cos 函数作为基准的使用方法。

<其 1> **2 相交流**

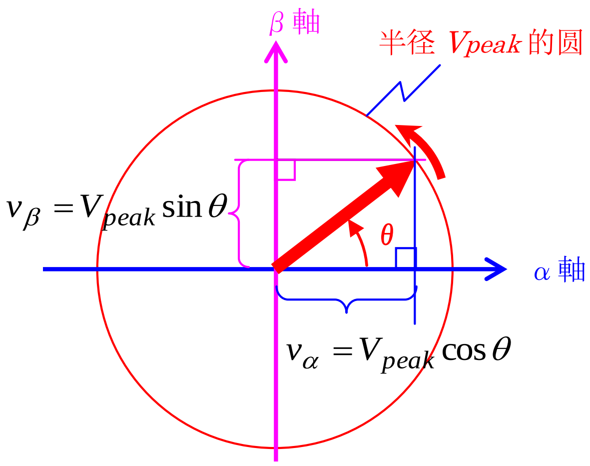


図 11-1 2 相交流電圧的三角函数表现

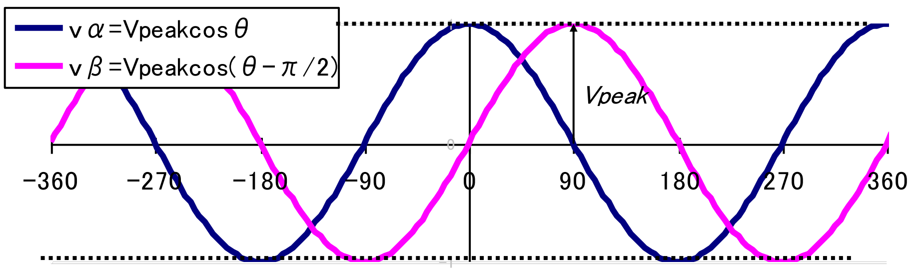


图 11-2 2 相交流**电压波形**

○ α 相電圧；从**长度** V_{peak} 的直线，α 軸上画垂**线**形成的三角形的底边長度的变化

$$v_\alpha = V_{peak}\cos\theta \qquad \text{-----------------------} (11\text{-}1)$$

○ β 相電圧；从**长度** V_{peak} 的直线，β 軸上画垂**线**形成的三角形的底边長度的变化

$$v_\beta = V_{peak}\sin\theta = V_{peak}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{-----------------------} (11\text{-}2)$$

・对于 α 相，β 相迟延 90 度。

<其２>　３相交流

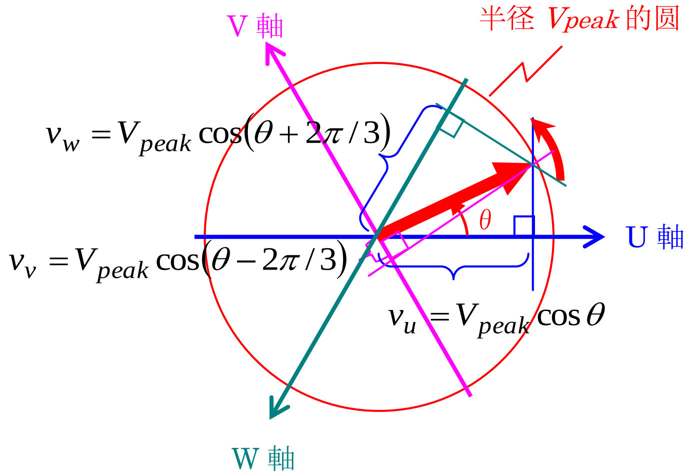


図 11-3　２相交流電圧的三角関数表現

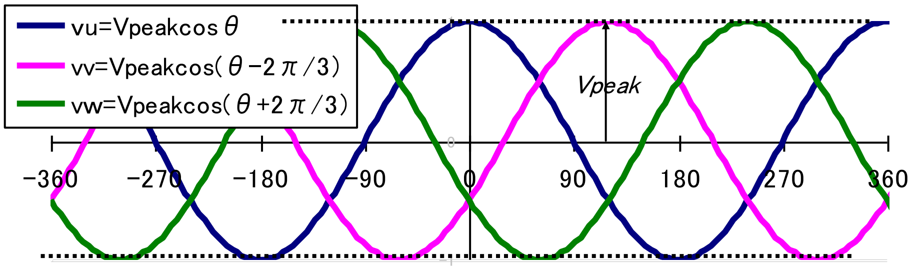


図 11-4　３相交流電圧波形

$$v_u = V_{peak}\cos\theta \quad \text{---} (11\text{-}3)$$

$$v_v = V_{peak}\cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{---} (11\text{-}4)$$

$$v_w = V_{peak}\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{---} (11\text{-}5)$$

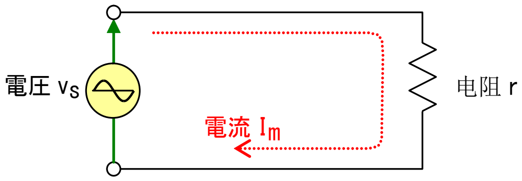
○　电气工学 3 相交流中利用的关系式　3 相交流的和为 0

$$\sin\theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\theta + \left(\sin\theta\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\theta\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\sin\theta\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

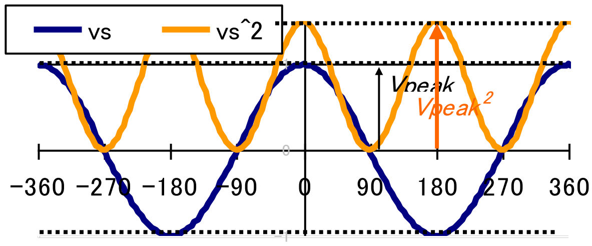
$$= \sin\theta\cdot\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$

【与电气的关联２】　有效值的計算方法 ；利用 2 倍角的公式与积分的公式



(a)电路



(b)电压及电压的電圧及電圧的平方波形

図 12-1　有效值的说明用图

如图 12-1(a)所示，考虑交流電圧 Vs 上连接电阻 r，导通交流電流 Is 的时候。
电阻发生的瞬时电力 p 是，

$$p = v_s \cdot i_r = \frac{{v_s}^2}{r} = r \cdot {i_s}^2 \quad \text{------(12-1)}$$

。做个例子，图 6 (b)上表示电压的 2 次幂波形。如此，電力是交流周期的 1/2 的周期上脉动。
一方，考虑到 1/2 周期区間的平均電力 P，能表示如下式。

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(v_s \cdot i_r)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{{v_s}^2}{r}\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(r \cdot {i_s}^2\right)d\theta \quad \text{------(12-2)}$$

在此，电气工学上为了将瞬时变化的交流電圧或者電流的大小用一个数字表示，
同样大小的直流電圧或者是跟直流電流成为一样電力的大小来定义为【有効值」。
将这有效值表记为 Vs-rms, Ir-rms，表示平均電力的话如下式。

$$P = \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left({v_s}^2\right)d\theta\right) = \frac{1}{r}\cdot {V_{s-rms}}^2$$

$$= r\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left({i_s}^2\right)d\theta\right) = r\cdot {I_{s-rms}}^2$$

据这些公式，有効值定义为如下式。

$$V_{s-rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left({v_s}^2\right)d\theta}\,, \qquad I_{s-rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left({i_s}^2\right)d\theta} \quad \text{------(12-3)}$$

○電圧作为例子，求有効值 Vs-rms 与波高值 Vpeak 的关系。

$$v_s = V_{peak}\cos\theta \quad \text{------(12-4)}$$

求平均電力的话如下式。

$$V_{s-rms}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(v_s{}^2\right)d\theta}=V_{peak}\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\cos^2\theta\right)d\theta}\,,$$

对于上式，用 2 倍角的公式(5-4)式，及 cos 積分的式(9-3)式，得到如下式。

$$V_{s-rms}=V_{peak}\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\cos^2\theta\right)d\theta}=V_{peak}\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta}=\frac{V_{peak}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi}=\frac{V_{peak}}{\sqrt{2}}$$

即是，電压及電流 sin 函数或者是 cos 函数时，有効値成为波高値的$1/\sqrt{2}$倍。

张飞实战电子官方网站 http://www.zhangfeidz.com